

VI COVEM, UPEL Maracay, del 08 al 11 de Octubre de 2007

ERRORES, DIFICULTADES Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS PRESENTES EN LA ENSEÑANZA DE LAS DERIVADAS.

Albéniz A. Meléndez Q. y Mario Arrieche

Universidad Nacional Experimental Rómulo Gallegos

Universidad Pedagógica Experimental Libertador

albenizamq@yahoo.com, marioarrieche@hotmail.com

Pensamiento matemático avanzado, Superior y empírico-experimental

RESUMEN

El problema abordado en esta investigación se centra en la caracterización de los significados personales de la derivada en estudiantes de Ingeniería, en el que se analizan los errores que cometen, las dificultades y conflictos semióticos que se hacen presentes en un proceso de enseñanza y aprendizaje de esta noción. Formó parte de un trabajo de investigación sobre los significados personales de la derivada en estudiantes de Ingeniería, del cual se consideran la descripción del problema destacando la importancia de esta noción para los Ingenieros en proceso de formación. El trabajo se sustenta en el Modelo Semiótico Antropológico propuesto por Godino y Batanero (1994) y usado por Arrieche (2002) y Meléndez (2005). Metodológicamente se sigue un paradigma de tipo mixto, combinando esquemas cualitativos y cuantitativos: por una parte se cuantifican las respuestas parcialmente correctas, las incorrectas y los diferentes tipos de errores cometidos, por la otra se analiza la naturaleza de los errores y sus efectos sobre la calidad de las respuestas. Los significados personales declarados (Godino, 2003) los representan los sistemas de prácticas discursivas o actuativas puestas en juego en las respuestas correctas e incorrectas, mientras que los errores y conflictos semióticos del aprendizaje se reflejan en las discordancias manifestadas entre estos significados y la referencia institucional. Los errores fueron de tipo conceptual, de operaciones básicas, de aplicación de fórmulas, de procedimiento y de simbología y nomenclatura. Finalmente, mediante la aplicación del análisis semiótico a la solución del cuestionario propuesto por el investigador, se identifican potenciales conflictos de significado; en el análisis semiótico practicado al cuestionario respondido por el estudiante que obtuvo la mayor calificación, destacan la ausencia de prácticas discursivas y las validativas se suponen implícitas en los procedimientos.

Palabras clave: Significado personal, análisis semiótico, derivadas.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo está enmarcado en la faceta cognitiva de la investigación sobre los significados personales de la derivada en estudiantes de ingeniería, desarrollado en el programa de Maestría en Enseñanza de la Matemática en la Universidad Rómulo Gallegos. Usamos la noción de significado en el sentido dado por Godino y Batanero (1994) como el sistema de prácticas (actuativas y discursivas) manifestadas por un sujeto ante una cierta clase de tareas. Mediante la prueba de conocimientos aplicada se determina el significado personal declarado, Godino (2003), incluyendo respuestas correctas e incorrectas desde el punto de vista institucional. La discordancia existente entre los significados personales e institucionales constituye los errores y conflictos semióticos del aprendizaje, mientras el significado personal logrado es el que se corresponde con la referencia institucional. Este trabajo se compone la Introducción, Planteamiento del problema, Antecedentes de la investigación, la Metodología, Análisis y discusión de los datos, las Conclusiones y las Referencias bibliográficas.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La derivada es un objeto matemático de especial importancia para los estudiantes de Ingeniería, porque es una herramienta básica para la evaluación del comportamiento de modelos matemáticos representativos de situaciones reales, como es el caso de análisis de rapidez de variación, optimización, análisis de curvas, etc. De allí la necesidad de proporcionar a los estudiantes de ingeniería la mayor solidez en el conocimiento de las derivadas y sus aplicaciones. La pregunta: ¿Cuáles son los significados personales que tienen los estudiantes de ingeniería, sobre las derivadas y sus aplicaciones?, es la que motiva esta investigación con el propósito de indagar sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes, los errores que cometen y qué efectivamente aprenden sobre un tema que reviste especial importancia para ellos, así como las causas de los indicadores de resultado negativo en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En ese sentido, surgen otras preguntas específicas para tratar de dar respuesta a la pregunta inicial: de carácter epistémico: ¿Qué son las derivadas?, ¿Cuál es el origen de las derivadas?; de carácter cognitivo: ¿Qué dificultades, errores y obstáculos presentan los estudiantes de ingeniería en el estudio de las derivadas?, de carácter Instruccional: ¿Cómo se enseñan las derivadas a los estudiantes universitarios? En este trabajo se intentará responder a la pregunta de carácter cognitivo, mediante la aplicación de un cuestionario sobre aspectos fundamentales de las derivadas, a un grupo de 60 estudiantes de Ingeniería Agronómica de la Universidad Rómulo Gallegos de San Juan de los Morros cursantes de Matemática II.

2. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado se hace referencia a algunos trabajos realizados por investigadores en didáctica de la matemática, en los que se consideran obstáculos epistemológicos y conflictos semióticos que surgen durante el proceso de instruccional de la matemática, y de la derivada en particular.

Contreras de la Fuente (2001), señala: *“las concepciones y obstáculos epistemológicos detectados a lo largo de la evolución histórica de los conceptos se repiten, con determinadas diferencias, como concepciones y obstáculos cognitivos en los sujetos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático.”* (p. 4)

Inglada y Font (2003), analizan algunos conflictos semióticos relacionados con la notación incremental y la notación diferencial, así como el que identifican como: *“La complejidad del paso de la derivada en un punto a la función derivada”* (p. 8).

Hitt (2003), analiza las dificultades presentes en el aprendizaje del cálculo; sostiene que además de los problemas de entendimiento de los procesos infinitos, debe añadirse los derivados del mal aprendizaje de precálculo. Respecto a la derivada, menciona la dificultad para los estudiantes establecer representaciones visuales de los conceptos matemáticos, además de su resistencia a hacerlo.

3. METODOLOGÍA

3.1. Enfoque Metodológico

La investigación se lleva a cabo mediante la aplicación de una prueba de conocimientos cuyo análisis se realiza siguiendo un paradigma metodológico de tipo mixto, combinando esquemas cuantitativos y cualitativos. Se determina la cantidad de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas y tipos de errores manifestados por los estudiantes; el enfoque cualitativo se desarrolla mediante la aplicación de la técnica del análisis semiótico, a la prueba aplicada, la describimos a continuación.

La técnica del “análisis semiótico” permite: *“caracterizar tanto los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático como los significados elementales puestos en juego en un acto de comunicación matemática”* (Godino y Arrieche, 2001, p.1). Estos autores sostienen que mediante este análisis es posible identificar tanto los conflictos potenciales en la interpretación de los textos de estudio como aquellos que ocurren durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Godino (2002) indica que al comparar los significados institucionales atribuidos a un objeto matemático por dos instituciones o por una persona y un referente institucional, se pueden identificar conflictos semióticos entre esos agentes. Los conflictos semióticos están representados por las disparidades entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos en interacción comunicativa y provocan dificultades y limitaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Más adelante señala Godino (2002): *“Para aplicar esta técnica se requiere disponer de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a las pruebas de evaluación aplicadas”*. En este caso, se aplica dicho análisis a la resolución realizada por el investigador a la prueba de evaluación de conocimientos sobre las derivadas, aplicada durante el desarrollo del curso de Matemática II, correspondiente al Lapso Académico 2003 01, comprendido entre los meses diciembre 2003 y Abril 2004.

Una primera clasificación de las unidades de análisis semiótico de un texto matemático propuesta por Godino y Arrieche (2001) es la siguiente: “unidades iniciales (apartados o secciones del texto), unidades primarias (oraciones o sentencias), unidades elementales (términos y expresiones que designan cada una de las seis unidades elementales) y unidades secundarias (combinación de dos o más unidades primarias)”. (p.2)

En cuanto al análisis aplicado a la prueba, las unidades iniciales son los ítems o problemas a resolver y las unidades elementales están ubicadas en el proceso de comunicación de la solución, clasificadas como elementos actuativos, descriptivos y justificativos.

3.2. Población y Muestra

La población la constituye los estudiantes del segundo semestre de Ingeniería Agronómica de la Universidad Rómulo Gallegos de San Juan de los Morros y la muestra, que fue tomada está conformada por 60 estudiantes que cursan Matemática II.

3.3. Instrumento aplicado

El instrumento utilizado para recoger los datos consistió en una prueba de conocimientos, aplicada a fin de evaluar qué significados atribuyen los estudiantes a las reglas de derivación de las funciones algebraicas y trascendentes más comunes, la regla de la cadena, la derivación aplicando logaritmos y la aplicación de la derivada en un punto de una función para obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva. La prueba está constituida por cinco preguntas o ítems, cuya estructura y contenido se detalla continuación:

Ítem 1.- Determine $f'(x)$ para: $f(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \cdot \operatorname{Arsec}(2x)$

Ítem 2.- Determine $f'(x)$ para: $f(x) = \frac{7^{3x}}{\operatorname{Artg}(x)}$

Ítem 3.- Determine $f'(x)$ para: $f(x) = \csc^5\left(\sqrt{3x^4 - 2x + 12}\right)$

Ítem 4.- Aplicando logaritmos determine $f'(x)$ para:

$$f(x) = \frac{(2x^3 + 5x^2 - 6x + 9) \cdot e^x \cdot \sec(x)}{\operatorname{tg}(x) \cdot \operatorname{Log}_4 x}$$

Ítem 5.- Determine las ecuaciones de las rectas Tangente y Normal a:

$$f(x) = \operatorname{Arctan}(2x) \quad \text{en } x_0 = -1$$

El objetivo de esta prueba es evaluar que significados atribuyen los estudiantes a las reglas de derivación: producto de una constante por una función, suma algebraica, producto y cociente de funciones, así como de las derivadas de las funciones algebraicas y trascendentes más comunes, la regla de la cadena, la derivación aplicando logaritmos y la aplicación de la derivada en un punto de una función para obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva.

4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE DATOS

Se quiere determinar los significados personales de los estudiantes de Ingeniería sobre las derivadas, haciendo el análisis de los resultados generales de la prueba de conocimientos mediante tablas de frecuencia y porcentajes de las diferentes respuestas obtenidas y, la interpretación de los mismos. Se establecieron tres categorías de respuesta: Correcta, Parcialmente correcta e Incorrecta. Los errores cometidos por los estudiantes se clasificaron en: conceptuales, de operaciones elementales, de aplicación de propiedades, de procedimiento y de notación.

4.1. Resultados generales de la prueba y análisis de errores

Los resultados de la prueba son expresados mediante el análisis a las respuestas parcialmente correctas e incorrectas de los estudiantes en primer lugar, y luego la clasificación de los errores cometidos por los estudiantes. En cada caso se hace una transcripción textual de lo que el estudiante escribió, luego el investigador hace los comentarios a que haya lugar. Para el Ítem 1 los resultados fueron los siguientes:

Cuadro 1. Estadística de respuestas. Ítem 1

Incorrectas		Parcialmente Correctas		Correctas		Respuestas en blanco		
Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	% respecto a las Incorrectas	% del total
21	35,00%	33	55,00%	6	10,00%	1	4,76%	1,67%
Total de respuestas				60	100%			

Frec.: Frecuencia

Sólo 6 estudiantes (10%) respondieron correctamente la pregunta lo cual indica un alto nivel de dificultad; 33 estudiantes (55%) manifestaron tener alguna noción del concepto evaluado. (Cuadro 1)

Cuadro 2. Errores cometidos por los estudiantes. Ítem 1

Conceptuales		Operaciones Básicas		Aplicación de fórmulas		Procedimiento		Simbología y nomenclatura	
Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	FREC.	%
23	32,86%	8	11,43%	20	28,57%	3	4,29%	16	22,86%
Total de errores registrados:						70			

Frec.: Frecuencia

La mayoría de los errores cometidos son conceptuales (32,86%) y de aplicación de fórmulas (28,57), no identifican la operación producto a derivar, aplican fórmulas no correspondientes o no aplican bien la regla de la cadena. Se remite al lector interesado a Meléndez (2005) en donde se hace un análisis detallado y pormenorizado de toda la prueba.

4.2. Análisis Semiótico de la Prueba

Se definieron los aspectos para calificar una respuesta como correcta, parcialmente correcta o incorrecta; el investigador desarrolla y explica su visión sobre cuál debe ser la respuesta correcta a cada ítem; esto constituye un significado institucional de referencia (Godino, 2003), a partir del cual se identificarán los errores y conflictos semióticos producto de las discordancias con el significado personal logrado de los estudiantes. El análisis semiótico se desarrolla en tres fases: exposición del texto y unidades primarias de análisis, identificación de las componentes y unidades elementales y la identificación de los conocimientos puestos en juego y conflictos semióticos potenciales. Los detalles debe consultarlos el lector interesado, en Meléndez (2005), para indagar sobre la totalidad de los resultados del análisis.

A continuación, a manera de ejemplo, presentamos el desarrollo del análisis realizado al ítem 1:

Ítem 1. Derivar la función: $f(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \cdot \operatorname{Arsec}(2x)$

Texto y unidades primarias del análisis:

1.1	Para obtener la <i>derivada</i> de $f(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \cdot \operatorname{Arsec}(2x)$, se debe identificar la operación <i>producto de funciones</i> y aplicar la fórmula: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
1.2	$f'(x) = (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8)' \cdot \operatorname{Arsec}(2x) + (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \cdot [\operatorname{Arsec}(2x)]'$
1.3	Luego se derivan las funciones $u = 3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8$ y $v = \operatorname{Arsec}(2x)$; como el <i>argumento</i> de v es también una <i>función</i> , se debe aplicar la <i>regla de la cadena</i> a una <i>función compuesta</i> :
1.4	$v = h \circ g = h[g(x)]; \quad v' = (h[g(x)])' = (h'(g)) \cdot g'(x) \Rightarrow (\operatorname{Arsec}(u))' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$
1.5	$f'(x) = (12x^3 - 10x^{-6} + 10) \cdot \operatorname{Arsec}(2x) + (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \cdot \frac{(2x)'}{2x\sqrt{(2x)^2 - 1}}$
1.6	Se <i>deriva</i> el <i>argumento</i> de la <i>función arcosecante</i> y se hacen las <i>simplificaciones</i> correspondientes, hasta obtener el resultado final.

1.7	$f'(x) = (12x^3 - 10x^{-6} + 10) \cdot \operatorname{Arsec}(2x) + (3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8) \cdot \frac{x}{x\sqrt{(2x)^2 - 1}}$ <p>Resultado final: $f'(x) = (12x^3 - 10x^{-6} + 10) \cdot \operatorname{Arsec}(2x) + \frac{3x^4 + 2x^{-5} + 10x - 8}{x\sqrt{(2x)^2 - 1}}$</p>
-----	--

Componentes y unidades elementales:

Praxis	Lenguaje	Teoría
<p>Situaciones: Problema de aplicación de la derivada del producto de una función polinómica y una función trigonométrica.</p> <p>Técnicas: Derivación, aplicación de la regla de la cadena, simplificación.</p>	<p>Términos y expresiones: Derivar, producto de funciones, función, argumento, regla de la cadena, simplificaciones, arcosecante.</p> <p>Notaciones: $f(x)$, $f'(x)$, x^n, $\operatorname{Arsec}(u)$ $(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$</p>	<p>Conceptos: Derivada, función, función compuesta, regla de la cadena, arcosecante.</p> <p>Propiedades: El argumento es una función. Reglas para derivar funciones y regla de la cadena.</p> <p>Validaciones: Justificación de cada operación y del resultado.</p>

Conocimientos y conflictos semióticos:

1.1 El investigador condiciona la aplicación de la derivada, a la identificación de la operación producto, propia del álgebra de funciones, y supone como conocido el término función. La no identificación de la operación o la no interpretación de la fórmula, constituyen conflictos semióticos potenciales.

1.2 Se han puesto en juego la fórmula para derivar un producto y elementos notacionales; la expresión indica la forma de aplicación de la fórmula y los conflictos semióticos ocurrirían con la identificación de las funciones, las operaciones relacionadas con la aplicación de la derivada de un producto y las fórmulas que se deben aplicar.

1.3 El investigador considera necesario conocer el concepto de *argumento*, así como la interpretación del significado y aplicación de la regla de la cadena para relacionar al argumento con la función compuesta y su derivada; de allí surgirían los posibles conflictos semióticos.

1.4 Se señala la forma general de una función compuesta, su derivada y la derivada de la función arcosecante; podrían surgir conflictos semióticos por incompreensión de la notación.

1.5 Se ha aplicado la derivada a las funciones polinómica y arcosecante, sólo queda por derivar al argumento $2x$. Los conflictos semióticos podrían ubicarse en el manejo de los exponentes y sus signos, así como en la identificación del argumento o la no adecuada aplicación de la regla de la cadena.

1.6 Se señala la última derivada que falta por obtener, la del argumento de la función arcosecante; el investigador supone conocida la técnica de simplificación de expresiones algebraicas. Conflictos semióticos potenciales los representan la interpretación de la técnica de la simplificación.

1.7 Se señala qué se debe simplificar. Conflictos semióticos ocurren cuando se simplifica la x externa a la raíz del denominador, con las x del polinomio en el numerador o algo similar.

1.8 Se muestra el resultado final. Cualquier operación que se haga a partir de este nivel, podría generar errores a consecuencia de conflictos semióticos.

5. CONCLUSIONES

Se determinó que la prueba resultó bastante difícil, puesto que de 60 estudiantes evaluados, sólo 4 aprobaron y, además, la nota promedio fue de 3 puntos, en una escala del 1 al 10. El análisis realizado a los errores cometidos por los estudiantes en la prueba, permitió detectar que la mayoría de errores fueron de tipo conceptual y de aplicación de fórmulas. La importancia de este análisis radica en que la identificación de los errores, que trae consigo la detección de conflictos semióticos y de obstáculos epistemológicos, de esta manera se puede establecer una sistematización de los mismos, identificar qué los produce, cuál es su origen, cómo pueden solucionarse o cómo pueden evitarse, etc., lo que podría ofrecer una oportunidad para desarrollar estrategias conducentes a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada como tema particular, y de la Matemática en todos los sentidos.

Se aplicó el análisis semiótico a la solución de la prueba planteada por el investigador, para establecer un significado institucional de referencia (Godino, 2003) y se identificaron los potenciales conflictos semióticos y obstáculos epistemológicos que podrían presentarse durante el intercambio profesor-alumno para desarrollar el tema en cuestión. Como un ejemplo de los posibles conflictos semióticos detectados tenemos la no identificación de la operación o la no interpretación de la fórmula, la identificación de las funciones, las operaciones relacionadas con la aplicación de la derivada de un producto y las fórmulas que se deben aplicar.

REFERENCIAS

- Arrieche, M. *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Tesis doctoral. Departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada.
- Contreras de la Fuente, A. (2000). La enseñanza del Análisis matemático en el bachillerato y primer curso de la universidad. Perspectiva desde los enfoques epistemológico y semiótico. *Actas de las XVI Jornadas del SI-IDM*. Huelva.
- Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(3): 325-355.
- Godino, J.D. y Arrieche, M. (2001). *El análisis semiótico como técnica para determinar significados*. Comunicación presentada en el V Simposio de la SEIEM, Grupo de Trabajo DMDC. Almería.
- Godino, J.D. (2002). *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible: <http://www.ugr.es/local/jgodino/>.
- Godino, J.D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas en didáctica de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible: <http://www.ugr.es/local/jgodino/>.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia.

Disponible: http://www.hemerodigital_unam.mx.

Inglada, N. y Font, V. (2003). *Significados Institucionales y Personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación Incremental*. XIX Jornadas del SI-IDM. Disponible:

http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cordova_2003/IngladaFont.pdf.

Meléndez, A. (2005). *Significados Personales de la Derivada en Estudiantes de Ingeniería*. Tesis de Maestría. Universidad Rómulo Gallegos. San Juan de los Morros. Venezuela.